EXAMEN PARTIEL 2

MAT-1200: Introduction à l'algèbre linéaire — Automne 2013
Date: 13 décembre.

Remarques:

- Durée de l'examen: 1 heure 50 minutes.
- Documents admis: deux feuilles 8 1/2 × 11, recto-verso.
- Seulement les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté seront admises.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro de matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'identité sur la table à côté de vous.

Question 1. (4 + 4 + 4 + 4 + 4 points)

Répondre par vrai ou faux à chacun des énoncés suivants. Justifier brièvement.

a) L'application définie par

$$\begin{array}{rccl} T\ : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 + 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

est linéaire.

b) Soient A et B deux matrices carrées de type $n \times n$, $n \neq 0$, telles que $\det(A) = 3$ et $\det(B) = -2$. Alors $\det\left(A^3\left(B^{-1}\right)^2\right) = \dfrac{27}{4}$.

c) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une solution au sens des moindres carrées du système $A\vec{x} = \vec{b}$ est $\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) On considère l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccl} T \;: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 \\ 0 \\ x_1 - 3x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On affirme que le noyau de T est de dimension 2.

e) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{20}} \\ \frac{-1}{\sqrt{20}} \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

M désigne la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$. On affirme que $(M^t)M(M^t) = M^{-1}$.

Question 2. (6 + 8 + 6 points)

On se donne la matrice 4×4

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le cofacteur $\mathrm{Cof}(a_{34})$ associé à l'élément a_{34} de la matrice A. Justifier votre résultat.

b) Calculer le déterminant de A. Justifier votre réponse et vos calculs.

c) Soit Q une matrice orthogonale de type 4×4 et B une autre matrice de type 4×4 telle que

$$A = QB(Q^t).$$

Évaluer le déterminant de B. Justifier votre réponse.

Question 3. (4 + 8 + 4 points)

Soit $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0)^t, \vec{e}_2 = (0,1,0)^t, \vec{e}_3 = (0,0,1)^t\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère la transformation linéaire définie par

$$\begin{array}{cccc} T & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ y+2z \\ 2y+4z \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Trouver la matrice A de T par rapport à la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que $\left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de ImT. **Justifier** votre réponse.

c) Quelle est la dimension du noyau de T. **Justifier votre réponse.**

Question 4. (4 + 6 + 4 + 6 points)

On notera par $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformation linéaire qui est la projection orthogonale sur le sous-espace $W = lin\{\vec{v}\}$ engendré par le vecteur $\vec{v} = (1,2)^t$.

a) Ecrire la matrice représentative de T dans la base canonique $\mathcal{C} = \{(1,0)^t, (0,1)^t\}$.

b) Soit $\mathcal{B}_1 = \{(1,3)^t, (1,4)^t\}$ une base de $\mathbb{R}^2$. Ecrire la matrice représentative de T dans la base $\mathcal{B}_1$.

c) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ de sorte que la matrice représentative de T dans la base $\mathcal{B}_2$ s'écrit sous la forme

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Déterminer la matrice représentative dans la base canonique de la transformation linéaire définie par T suivie d'une rotation d'angle $\pi/2$ de centre $(0,0)$ dans le sens anti-horaire.

Question 5. (4 + 4 + 8 + 4 + 4 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Utiliser directement la définition pour montrer que $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)^t$ est un vecteur propre de A. Calculer la valeur propre λ_1 correspondante au vecteur $\vec{v}_1$.

b) Utiliser directement la définition pour montrer que $\vec{v}_2 = (3, 0, 1)^t$ est un vecteur propre de A. Calculer la valeur propre λ_2 correspondante au vecteur $\vec{v}_2$.

c) Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2.

d) La matrice est-elle diagonalisable? Si oui, trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Ne pas évaluer P^{-1}.

e) Evaluer la matrice A^{2014}. Justifier vos calculs.